Proceedings of the 11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering -- ENCIT 2006
Braz. Soc. of Mechanical Sciences and Engineering -- ABCM, Curitiba, Brazil, Dec. 5-8, 2006

Paper CIT06-0346

ESTUDO DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL EM CILINDROS VAZADOS COM CONDIÇÕES DE CONTORNO DUPLAMENTE CONVECTIVAS

Valesca Alves Corrêa
Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de São Paulo, UNESP – Guaratinguetá – SP
valesca@mec.unitau.br

Luiz Roberto Carrocci
Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de São Paulo, UNESP – Guaratinguetá – SP
carroci@feg.unesp.br

Carlos Alberto Chaves
Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Taubaté, UNITAU – Taubaté – SP
carlosachaves@yahoo.com.br

Marcio Abud Marcelino
Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de São Paulo, UNESP – Guaratinguetá – SP
abud@feg.unesp.br

Resumo. *Problemas na área de Transferência de Calor, envolvendo tanto condução quanto convecção sujeitos a condições de contorno clássicas tem sido resolvidos por simulação numérica através de softwares disponíveis atualmente. Entretanto, a forma clássica de se encontrar soluções analíticas é ainda um recurso extremamente útil na validação de soluções numéricas obtidas através destes softwares. Este trabalho apresenta soluções analíticas para o problema da condutividade térmica variável em um cilindro vazado com condições de contorno duplamente convectivas. São resolvidas analiticamente as equações da condução de calor em regime permanente nas coordenadas cilíndricas utilizando o software de computação simbólica Maple. Serão apresentadas as análises do comportamento do problema em função dos diversos parâmetros inerentes à solução.*

Palavras chave: condução de calor, computação simbólica, Maple.

1. Introdução

A condução de calor no regime permanente em geometrias cilíndricas ocorre em inúmeras aplicações na engenharia e tem sido objeto de muitos estudos nos últimos anos (Arpaci, 1966, Özişic, 1976 e Burmeister, 2002).

O avanço tecnológico dos computadores tem permitido uma vasta variedade de aplicações em simulações numéricas na área de transferência de calor (Özişic, 1994).

A resolução analítica em problemas de transferência de calor ainda é de grande importância, inclusive na validação das soluções numéricas (Carslaw e Jaeger, 1956).

O estudo analítico da transferência de calor no regime permanente em geometrias cilíndricas leva a um equacionamento complexo e desgastante que pode ser minimizado com o auxílio da computação simbólica. Vários trabalhos (Barton, 1997; Yang, 1998 e Subramanian et al, 2000) apresentam o uso da computação simbólica na resolução de problemas térmicos conseguindo também resultados satisfatórios.

Devido a sua grande potencialidade, o software Maple pode ser utilizado nas diversas ciências, como matemática, física, química, estatística e em especial, na engenharia, pois possibilita trabalhar com informações na forma algébrica, ou seja, realiza manipulação de expressões que envolvem símbolos, variáveis e operações formais. Possui também ferramentas gráficas para visualização dos resultados, linguagem de programação própria e permite a criação de documentos de texto em diversos formatos (Mariani, 2005).

Neste estudo, o software Maple será utilizado na resolução das equações diferenciais, na aplicação de métodos analíticos no problema de um cilindro vazado com condições de contorno duplamente convectivas e condutividade térmica variável em regime permanente.

2. Formulação do Problema

O software Maple será utilizado para o desenvolvimento analítico unidimensional de um cilindro vazado longo de raio $a \le r \le b$, sem geração interna de calor com condições de contorno duplamente convectivas. A superfície de contorno dissipa calor por convecção em $r = a$ e $r = b$, como ilustra a Fig. 1.

O problema físico é mostrado matematicamente por:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \cdot k \cdot \frac{dT(r)}{dr}\right) = 0 \qquad a < r < b \tag{1}$$

sendo r a coordenada radial, a o raio interno, b o raio externo do cilindro e k a condutividade térmica do material considerada variável e definida por:

$$k = k_o \cdot (1 + \beta \cdot \mathrm{T(r)}) \tag{2}$$

onde k_0 representa a condutividade térmica do material na temperatura de referência T_0 e β uma constante com unidade [1/°C]. O problema apresenta as seguintes condições de contorno:

$$-k\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{dr}} + h_1 T(r) = h_1 \mathrm{T}_{\infty 1} \qquad \text{em } r = a \tag{3}$$

e

$$-k\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{dr}} + h_2 T(r) = h_2 \mathrm{T}_{\infty 2} \qquad \text{em } r = b \tag{4}$$

sendo h_1 o coeficiente de transferência de calor no fluido interno, h_2 o coeficiente de transferência de calor do fluido externo, $T_{\infty 1}$ é a temperatura do fluido interno e $T_{\infty 2}$ é a temperatura do fluido externo:

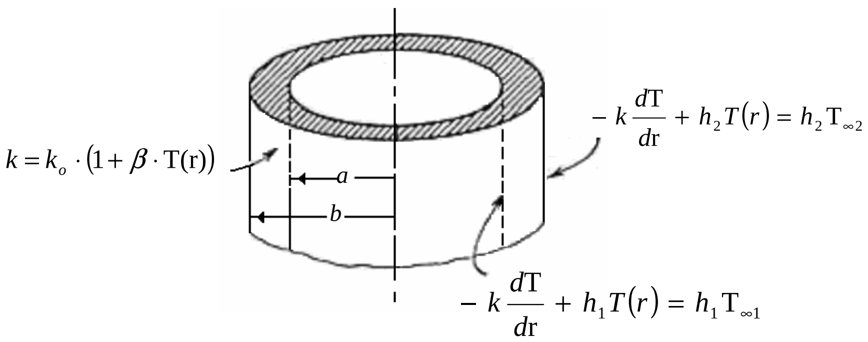

Figura 1 Cilindro vazado típico com condições de contorno convectivas.

3. Solução Analítica do Problema

Para a condição de condutividade térmica variável é definida a condição de variação para este parâmetro no software Maple da seguinte forma:

```
> k:=ko*(1+beta*T(r));
```

$$k := ko\,(1 + \beta\,\mathrm{T}(r)) \tag{5}$$

A equação da condução para o problema descrito na Eq. (1) é representado no software Maple por:

```
> heat:= 1/r*diff(r*k*diff(T(r),r),r)=0;
```

$$heat := \frac{ko\,(1+\beta\,T(r))\left(\frac{d}{dr}T(r)\right) + r\,ko\,\beta\left(\frac{d}{dr}T(r)\right)^2 + r\,ko\,(1+\beta\,T(r))\left(\frac{d^2}{dr^2}T(r)\right)}{r} = 0 \qquad (6)$$

Através do comando *dsolve*, o software Maple apresenta as seguintes soluções:

```
> heat:=dsolve(heat,T(r));
```

$$heat := T(r) = -\frac{1}{\beta},\ T(r) = \frac{1}{2}\,\frac{-2+2\sqrt{1+2\,\beta\,\_C1\,\ln(r)+2\,\beta\,\_C2}}{\beta},$$
$$T(r) = \frac{1}{2}\,\frac{-2-2\sqrt{1+2\,\beta\,\_C1\,\ln(r)+2\,\beta\,\_C2}}{\beta} \qquad (7)$$

Uma das soluções deve ser escolhida para a continuidade da solução, sendo então atribuída a variável *heat*.

```
> heat := 1/2*1/beta*(-
2+2*(1+2*beta*_C1*ln(r)+2*beta*_C2)^(1/2));
```

$$heat := \frac{1}{2}\,\frac{-2+2\sqrt{1+2\,\beta\,\_C1\,\ln(r)+2\,\beta\,\_C2}}{\beta} \qquad (8)$$

A equação pode ser simplificada pelo comando *simplify* como mostrado abaixo:

```
> heat:= simplify(%);
```

$$heat := \frac{-1+\sqrt{1+2\,\beta\,\_C1\,\ln(r)+2\,\beta\,\_C2}}{\beta} \qquad (9)$$

Para obter-se $-k\dfrac{dT}{dr}$ integra-se uma vez a Eq. (1) em relação à *r* e atribui-se a variável *cond* tendo:

```
> cond:= -_C1/r;
```

$$cond := -\frac{\_C1}{r} \qquad (10)$$

Substituindo a variável *cond* na Eq. (2) e atribuindo o resultado a variável *cc1*, define-se a primeira condição de contorno.

```
> cc1:= cond=h1*(heat-T1);
```

$$cc1 := -\frac{\_C1}{r} = h1\left(\frac{-1+\sqrt{1+2\,\beta\,\_C1\,\ln(r)+2\,\beta\,\_C2}}{\beta} - T1\right) \qquad (11)$$

A seguir foi usada uma seqüência de comandos do Maple necessária para se chegar a solução da Eq. (2) em função da solução analítica obtida:

```
> termo1:=solve(cc1,(1+2*beta*_C1*ln(r)+2*beta*_C2)^(1/2));
```

$$termo1 := -\frac{\beta\_C1 - h1\, r - h1\, r\, T1\, \beta}{h1\, r} \tag{12}$$

```
> termo1:= expand(%);
```

$$termo1 := -\frac{\beta\_C1}{h1\, r} + 1 + T1\, \beta \tag{13}$$

```
> termo1 := termo1^2;
```

$$termo1 := \left(-\frac{\beta\_C1}{h1\, r} + 1 + T1\, \beta\right)^2 \tag{14}$$

```
> termo1:=expand(%);
```

$$termo1 := \frac{\beta^2\, \_C1^2}{h1^2\, r^2} - \frac{2\, \beta\, \_C1}{h1\, r} - \frac{2\, \beta^2\, \_C1\, T1}{h1\, r} + 1 + 2\, T1\, \beta + T1^2\, \beta^2 \tag{15}$$

```
> termoraiz:= (1+2*beta*_C1*ln(r)+2*beta*_C2)^(1/2);
```

$$termoraiz := \sqrt{1 + 2\, \beta\, \_C1\, \ln(r) + 2\, \beta\, \_C2} \tag{16}$$

```
> pot1:= termoraiz^2;
```

$$pot1 := 1 + 2\, \beta\, \_C1\, \ln(r) + 2\, \beta\, \_C2 \tag{17}$$

```
> termofim1:= termo1-pot1;
```

$$termofim1 := \frac{\beta^2\, \_C1^2}{h1^2\, r^2} - \frac{2\, \beta\, \_C1}{h1\, r} - \frac{2\, \beta^2\, \_C1\, T1}{h1\, r} + 2\, T1\, \beta + T1^2\, \beta^2 - 2\, \beta\, \_C1\, \ln(r) - 2\, \beta\, \_C2 \tag{18}$$

```
> termofim1:=subs(r=a,termofim1);
```

$$termofim1 := \frac{\beta^2\, \_C1^2}{h1^2\, a^2} - \frac{2\, \beta\, \_C1}{h1\, a} - \frac{2\, \beta^2\, \_C1\, T1}{h1\, a} + 2\, T1\, \beta + T1^2\, \beta^2 - 2\, \beta\, \_C1\, \ln(a) - 2\, \beta\, \_C2 \tag{19}$$

De maneira similar o mesmo procedimento é realizado para a segunda condição de contorno:

```
> cc2:= cond=h2*(T2-heat);
```

$$cc2 := -\frac{\_C1}{r} = h2\left(T2 - \frac{-1+\sqrt{1+2\,\beta\,\_C1\,\ln(r)+2\,\beta\,\_C2}}{\beta}\right) \tag{20}$$

```
> termo2:=solve(cc2,(1+2*beta*_C1*ln(r)+2*beta*_C2)^(1/2));
```

$$termo2 := \frac{\beta\,\_C1 + h2\,r\,T2\,\beta + h2\,r}{h2\,r} \tag{21}$$

```
> termo2:= expand(%);
```

$$termo2 := \frac{\beta\,\_C1}{h2\,r} + T2\,\beta + 1 \tag{22}$$

```
> termo2 := termo2^2;
```

$$termo2 := \left(\frac{\beta\,\_C1}{h2\,r} + T2\,\beta + 1\right)^2 \tag{23}$$

```
> termo2:=expand(%);
```

$$termo2 := \frac{\beta^2\,\_C1^2}{h2^2\,r^2} + \frac{2\,\beta^2\,\_C1\,T2}{h2\,r} + \frac{2\,\beta\,\_C1}{h2\,r} + T2^2\,\beta^2 + 2\,T2\,\beta + 1 \tag{24}$$

```
> termoraiz:= (1+2*beta*_C1*ln(r)+2*beta*_C2)^(1/2);
```

$$termoraiz := \sqrt{1+2\,\beta\,\_C1\,\ln(r)+2\,\beta\,\_C2} \tag{25}$$

```
> pot2 := termoraiz^2;
```

$$pot2 := 1+2\,\beta\,\_C1\,\ln(r)+2\,\beta\,\_C2 \tag{26}$$

```
> termofim2:= termo2-pot2;
```

$$termofim2 := \frac{\beta^2\,\_C1^2}{h2^2\,r^2} + \frac{2\,\beta^2\,\_C1\,T2}{h2\,r} + \frac{2\,\beta\,\_C1}{h2\,r} + T2^2\,\beta^2 + 2\,T2\,\beta - 2\,\beta\,\_C1\,\ln(r) - 2\,\beta\,\_C2 \tag{27}$$

```
> termofim2:=subs(r=b,termofim2);
```

$$termofim2 := \frac{\beta^2\,\_C1^2}{h2^2\,b^2} + \frac{2\,\beta^2\,\_C1\,T2}{h2\,b} + \frac{2\,\beta\,\_C1}{h2\,b} + T2^2\,\beta^2 + 2\,T2\,\beta - 2\,\beta\,\_C1\,\ln(b) - 2\,\beta\,\_C2 \tag{28}$$

Valores numéricos típicos são atribuídos para os parâmetros do problema como mostra a Tab. 1.

Tabela 1.Valores atribuídos ao problema

Propriedade	Sibologia	Valor	Unidade	Propriedade	Sibologia	Valor	Unidade
Condutividade térmica na temperatura T_0	k_0	0.05	W/m ºC	Temperatura do fluido externo	$T_{\infty 2}$	23	ºC
Constante	β	1	1/ºC	Raio interno	*a*	0.3	m
Temperatura do fluido interno	$T_{\infty 1}$	100	ºC	Raio externo	*b*	0.5	m
Coeficiente de convecção interno	h_1	100	W/m^2 ºC	Coeficiente de convecção externo	h_2	23	W/m^2 ºC

Com os valores numéricos atribuídos a variável *eq1* do Maple recebe a solução da primeira condição de contorno.

```
> eq1:= solve(termofim1,_C2);
```

$$eq1 := 0.00005555555555\ \_C1^2 + 0.8373061370\ \_C1 + 600. \tag{29}$$

Analogamente ocorre com a segunda condição de contorno:

```
> eq2:= solve(termofim2,_C2);
```

$$eq2 := 0.002000000000\ \_C1^2 + 1.353147180\ \_C1 + 49.45000000 \tag{30}$$

A resolução da constante de integração *_C1* é então encontrada como demonstra as linhas de comando do Maple abaixo:

```
> eq:= eq2-eq1;
```

$$eq := 0.001944444444\ \_C1^2 + 0.5158410430\ \_C1 - 550.5500000 \tag{31}$$

```
> _C1:= [solve(eq,_C1)];
```

$$\_C1 := [415.7479516, -681.0376310] \tag{32}$$

A escolha do segundo valor da constante *_C1* é feita em função de apresentar o resultado mais realístico para o problema.

```
> _C1:= _C1[2];
```

$$\_C1 := -681.0376310 \tag{33}$$

Automaticamente o valor da constante *_C2* é mostrado pelo software Maple.

```
> _C2:=eq2;
```

$$\_C2 := 55.53035970 \tag{34}$$

A solução da Eq. (1) então é mostrado abaixo.

```
> heat;
```

$$-10.00000000 + 10.00000000\sqrt{12.10607194 - 136.2075262\ \ln(r)} \tag{35}$$

4. Resultados

Simulações foram realizadas onde os valores de alguns parâmetros foram alternados e suas influências mostradas.

Para a primeira simulação foram usados os valores contidos na Tab. 1 para a distribuição da temperatura para dois valores distintos do parâmetro β:

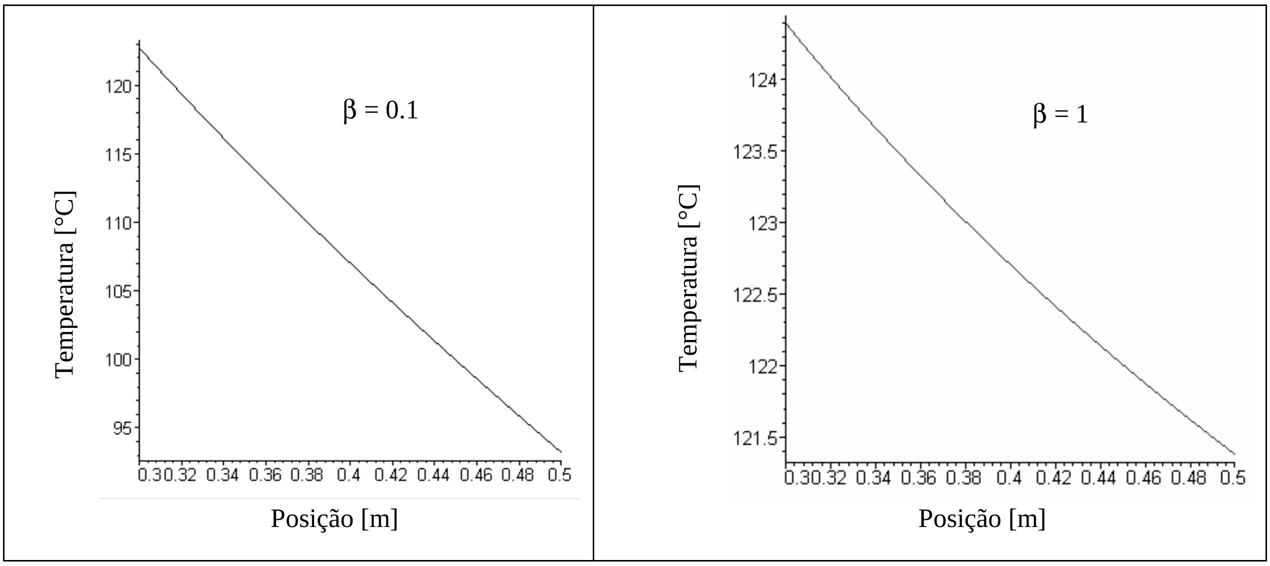

Figura 2. Distribuição de Temperatura.

Valores do parâmetro β acima de 1 não apresentaram variação relevante na distribuição de temperatura.

Para a segunda simulação os valores do coeficiente de transferência de calor interno variaram conforme Fig. 3, sendo 50 o valor limite possível de ser calculado.

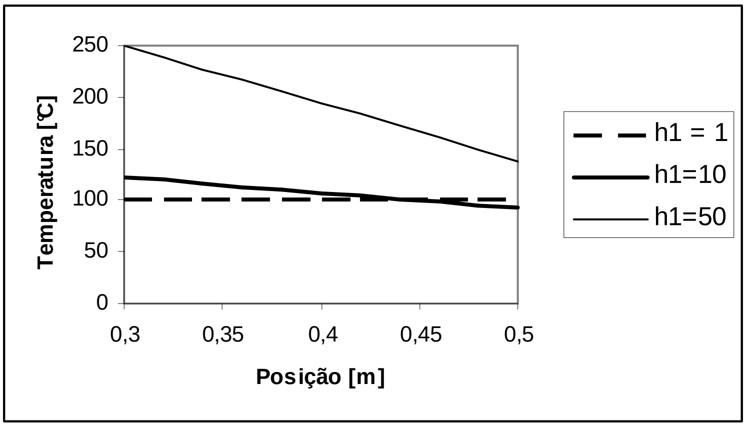

Figura 3. Distribuição de Temperatura.

4. Conclusões

O trabalho de obtenção de soluções analíticas de problemas envolvendo transferência de calor com condições de fronteira complexas é muitas vezes uma tarefa árdua e desgastante em função do desenvolvimento da formulação definida.

Neste trabalho foi possível obter uma solução analítica com o uso do software de computação simbólica, Maple, na resolução do problema permanente de condução de calor com condutividade térmica variável. Para entender o problema foram realizadas simulações onde os resultados foram possíveis de serem alcançados em função de uma faixa significativa dos diversos fatores apresentados. Os resultados encontrados se apresentaram consistentes, portanto o uso do software na resolução de problemas de condução é uma metodologia viável na obtenção de soluções analíticas.

5. Referências

Arpaci, V. S., “Conduction Heat Transfer”, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

Barton, S., 1997, “Use of the program maple for solving Fourier´s equation”, Nonlinear Analysis, Methods & Applications, Vol. 30, No. 8, pp. 4859-4862.

Burmeister, L. C., 2002, “The Effect of Space-Dependent Thermal Conductivity on the Steady Central Temperature of a Cylinder”, Jounal of Heat Transfer, Vol. 124, pp. 195-213.

Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., “Conduction of Heat in Solids”, (2nd Edn), Oxford Science Publications, Oxford (1956) (reprinted 1976).

Mariani, V. C., Maple: Fundamentos e Aplicações, Ed. LTC, 2005.

Özişic, M. N., “Finite Difference Methods in Heat Transfer”, CRC Press, 1976.

Özişic, M. N., “Heat Conduction.”, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, 1976.

Subramanian, V. R., and White, R. E., 2000, “Symbolic solutions for boundary value problems using Maple”, Elsevier, Computer and Chemical Engineering , 24, pp 2405-2416.

Yang, C., 1998, “A sequential method to estimate the strength of the heat source based on symbolic computation”, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 41, No. 14, pp 2245-2252.

STUDY OF VARIABLE THERMAL CONDUCTIVITY IN HOLLOW CYLINDERS WITH DOUBLE CONVECTIVE BOUNDARY CONDITIONS

Valesca Alves Corrêa
Departament of Mechanical Engineering, São Paulo State University, UNESP - Guaratinguetá - SP – Brazil
valesca@mec.unitau.br

Luiz Roberto Carrocci
Departament of Mechanical Engineering, São Paulo State University, UNESP - Guaratinguetá - SP – Brazil
carroci@feg.unesp.br

Carlos Alberto Chaves
Departament of Mechanical Engineering, University of Tuabaté, UNITAU - Taubaté - SP – Brazil
carlosachaves@yahoo.com.br

Marcio Abud Marcelino
Departament of Mechanical Engineering, São Paulo State University, UNESP - Guaratinguetá - SP – Brazil
abud@feg.unesp.br

Abstract

Heat transfers problems, involving conduction and convection with classical boundary conditions has been resolved for numerical simulation through available softwares. However, the classical way to find analytical solutions are extremely useful resource in the validation of these numerical solutions. This work presents an unpublished analytical solutions for the classical problem of the hollow cylinder with double convective boundary conditions with variable thermal conductivity . The equations of the conduction heat transfer in cylindrical coordinates are solved analytically using the software of symbolic computation Maple. Will be presented the analyses of the problem behaviors in function of the some parameters of the solution.

Keywords: Heat conduction, double convection, symbolic computation.